

Le problème de l'arborescence de Steiner dans les réseaux tout-optiques

Dimitri Watel^{1,2} and Marc-Antoine Weisser¹

¹SUPELEC System Sciences, Computer Science Dpt., 91192 Gif sur Yvette, France

²University of Versailles, 45 avenue des Etats-Unis, 78035, France

Connaissant un graphe orienté contenant n nœuds et des arcs pondérés positivement, possédant une *racine* r et un ensemble X de k nœuds appelés *terminaux*, le problème de l'arborescence de Steiner (Directed Steiner Tree ou DST) consiste à calculer une arborescence de poids minimal enracinée en r couvrant tous les terminaux. Ce problème est adapté pour modéliser la diffusion multicast dans un réseau quand celui-ci ne contient aucun nœud dit *non diffusant*. Un tel nœud est incapable de copier une donnée qu'il reçoit. Il est donc dans l'obligation pour transférer cette donnée à plusieurs destinataires de la recevoir plusieurs fois. Le poids de son arc entrant est donc démultiplié. La présence de nœuds non diffusants est visible par exemple dans un type de réseaux, dits tout-optiques, où tant que le paquet est encodé sous forme optique, il ne peut être dirigé que vers un seul destinataire. On s'intéresse à une généralisation de DST, nommée Arborescence de Steiner à Branchement Contraint (ASBC) modélisant ce problème de multicast dans le cas d'un réseau où le nombre de nœuds diffusants est limité par un entier d . Nous montrons que ce problème est XP quand il est paramétré par d . Nous montrons également qu'il est possible de construire, à l'aide de ASBC, une $\lceil \frac{k-1}{d} \rceil$ -approximation XP en d pour le problème DST. Enfin, nous montrons que ASBC, sous contrainte que $\text{NP} \not\subseteq \text{DTIME}[n^{O(\log \log n)}]$, ne peut être approché polynomialement avec un rapport $1 + (\frac{1}{e} - \epsilon) \frac{k}{d-1}$, quelque soit $\epsilon > 0$.

Keywords: Arborescence de Steiner, Réseau optique, Approximation polynomiale

1 Introduction

Le problème de l'arborescence de Steiner (Directed Steiner Tree ou DST) consiste, connaissant un graphe orienté avec des arcs pondérés positivement et possédant une *racine* r et un ensemble X de nœuds appelés *terminaux*, à calculer une arborescence de poids minimal enracinée en r couvrant tous les terminaux. C'est une généralisation du problème de l'arbre de Steiner, qui est NP-Complet [Kar72].

Ce problème est principalement connu pour constituer un modèle de la diffusion multicast dans un réseau où l'on cherche à relier la racine aux terminaux. Chaque arc est une connexion possible entre deux nœuds et son poids correspond au coût entre ces deux nœuds si la racine l'utilise pour transmettre ses paquets aux terminaux (ce coût peut être déterminé par la congestion du réseau, par une consommation d'énergie, ...).

On s'intéresse ici à une généralisation de ce problème de multicast dans des réseaux possédant deux catégories de routeurs : les nœuds *non diffusants* et les nœuds *diffusants*. Un nœud non diffusant ne peut dupliquer un paquet, en conséquence de quoi, il doit le recevoir autant de fois qu'il souhaite le retransmettre à des successeurs, ou le lire s'il est destinataire. Au contraire, un nœud diffusant peut transmettre une donnée entrante plusieurs fois à tous ses successeurs. La présence de routeurs non diffusants est visible par exemple dans un type de réseaux, dits tout-optiques, où tant que le paquet est encodé sous forme optique, il ne peut être dirigé que vers un seul destinataire, à moins de disposer d'un routeur diffusant capable de diviser le flux en deux ou de le réencoder temporairement sous forme électronique. Ces méthodes sont coûteuses (en énergie, en temps ou en qualité de solution) et ces réseaux limitent donc l'ensemble des nœuds diffusants.

Le problème de Steiner n'est plus adapté pour modéliser cette problématique car il suppose que tous les nœuds sont diffusants. Ce problème a été premièrement introduit dans sa version non orientée [MZQ98, LW05, RCT⁺12]. Si le graphe est un arbre, le problème de placement optimal des nœuds diffusants est polynomial [RTBW12]. A l'inverse, dans un graphe quelconque orienté où aucun arc ne peut transmettre deux fois le même paquet, le problème est NP-Complet [GHSV02, WWBB13]. Cet article étudie un modèle

orienté appelé *Arborescence de Steiner à Branchement Constraints* (ASBC). En plus du problème pratique que permet de modéliser ASBC, nous verrons qu'il est en mesure d'apporter un nouveau type d'algorithme d'approximation paramétré pour l'arborescence de Steiner.

Après avoir introduit ce modèle dans la section 2, et décrit ses liens avec DST et ses applications dans le réseau tout-optique, nous nous intéresserons dans la section 3 à sa complexité paramétrée vis-à-vis du nombre de nœuds diffusants autorisés. Dans la section 4, nous étudierons deux résultats d'approximation : l'un visant à approcher DST, et l'autre décrivant un rapport d'inapproximabilité pour ASBC.

2 Description du Problème ASBC

Afin de définir le problème ASBC, nous allons premièrement définir quelques notations utiles. Dans une instance de DST, $G = (V, A)$ désignera le graphe avec ses nœuds et arcs, r , X et ω désigneront respectivement la racine, les terminaux, et les poids (positifs) des arcs. Enfin k , n et m désigneront le nombre de terminaux, de nœuds et d'arcs dans cette instance.

Soient u et v deux nœuds de G , alors $P(u, v)$ désignera un plus court chemin (vis-à-vis des poids ω) entre ces nœuds et $\omega^\diamond(u, v)$ désignera son coût, ou l'infini si ce chemin n'existe pas.

Définition 1. Le *graphe des plus courts chemins* G^\diamond est un graphe complet contenant les mêmes nœuds que G mais où tout arc (u, v) est pondéré avec le poids $\omega^\diamond(u, v)$.

Définition 2. Soit T un arbre du graphe G^\diamond enraciné en r et couvrant tous les terminaux, alors on définit son coût total par $\omega^\diamond(T) = \sum_{(u,v) \in T} \omega^\diamond(u, v)$.

Définition 3. Un nœud de *branchement* dans un arbre est un nœud avec plusieurs fils.

Problème 1. Connaissant une instance $I = (G, r, X, \omega)$ de DST, et un entier strictement positif $d \leq k - 1$, le problème de l'Arborescence de Steiner avec Branchements Constraints (ASBC) recherche, dans le graphe des plus courts chemins G^\diamond , un arbre T enraciné en r , couvrant X , ne possédant pas plus de d nœuds de branchements et minimisant son coût $\omega^\diamond(T)$.

2.1 Lien avec le problème de l'arborescence de Steiner

ASBC est une généralisation de DST. En effet, si $d = k - 1$, alors on s'autorise à renvoyer tout arbre. On recherche donc une arborescence de Steiner de poids minimal. ASBC est donc NP-Complet.

On peut construire une k -approximation élémentaire pour DST en reliant la racine à tous les terminaux par des plus courts chemins. Cette approximation peut être adaptée, avec le même rapport d'approximation, pour ASBC en reliant r à chaque terminal t avec l'arc (r, t) .

2.2 Recherche d'un arbre de multicast dans un réseau tout-optique

Rechercher les solutions dans G^\diamond présente deux intérêts. La première raison est la garantie de toujours trouver une solution réalisable T . Dans un graphe quelconque, limiter le nombre de nœuds de branchement rend le problème d'existence d'une solution (et donc de minimisation) bien plus difficile [WWBB13]. La seconde raison est qu'un arbre de multicast avec nœuds diffusants peut en être extrait. Un paquet rejoint un terminal depuis la racine en suivant les plus courts chemins décrits par les arcs de la solution T . Chaque nœud de branchement de T est un nœud diffusant du réseau. Si deux chemins utilisent deux fois le même nœud dans le graphe original, c'est que ce nœud, non diffusant, reçoit et transmet deux fois le paquet. Dans ce cas, il se peut que la solution optimale dans ce graphe d'origine ne soit pas un arbre.

2.3 Recherche d'un arbre de multicast dans un réseau tout-optique où les nœuds diffusants sont déjà placés.

Le problème ASBC suppose que tout routeur peut jouer le rôle d'un nœud diffusant, mais que l'on souhaite n'en utiliser qu'un nombre limité. On peut s'intéresser au problème similaire où tous les nœuds diffusants D et non diffusants ND sont déjà placés dans le réseau. Le problème se réduit alors à trouver une arborescence de Steiner classique dans G^\diamond restreint à $\{r\} \cup X \cup D$. En effet, toute solution réalisable de

ASBC contenant des nœuds de ND peut être transformée en une solution au pire aussi coûteuse ne contenant aucun nœud de ND . Les rapports d'approximation de DST sont conservés dans cette version.

3 Complexité paramétrée

Théorème 3.1. *Le problème ASBC paramétré par d est XP.*

Démonstration. Montrons qu'il existe un algorithme polynomial pour le problème ASBC si d est borné.

Il faut en premier lieu remarquer qu'au moins une solution optimale T^* ne contient que la racine, des terminaux et des nœuds de branchements κ^* , car il est toujours possible de réduire le coût d'un arbre en contractant ses chemins en arcs qui ont, rappelons-le, le poids des plus courts chemins. Cet arbre est donc un arbre couvrant de poids minimum dans le graphe G^\triangleright restreint aux nœuds r , X et κ^* . En itérant sur tous les d -uplets possibles κ de nœuds diffusants, en nombre $O(n^d)$, et en appliquant dans G^\triangleright restreint aux nœuds r , X et κ un algorithme d'arborescence couvrante de poids minimum, en $O((1+k+d)^2)$ [Tar77], on trouve la solution optimale en temps $O(n^d(1+k+d)^2)$. \square

Théorème 3.2. *Le problème ASBC paramétré par d est W[2]-difficile.*

Idée de la démonstration. Sachant que Set Cover est W[2]-Complet quand il est paramétré par la valeur de la solution optimale [DF12], en adaptant la réduction classique de ce problème vers le problème de Steiner, il est possible de trouver une réduction FPT vers notre problème paramétré. \square

4 Résultats d'approximation polynomiale

Théorème 4.1. *Soit $I = (G, r, X, \omega)$ une instance de DST de solution optimale T^* , de coût ω^* , et soit $I' = (I, d)$ une instance de ASBC de solution optimale T_d^* . Alors $\frac{\omega^\triangleright(T_d^*)}{\omega^*} \leq \lceil \frac{k-1}{d} \rceil$.*

Démonstration. En partant de la solution optimale T^* , on va construire une solution réalisable T_d vérifiant ce rapport. Et puisque $\omega^\triangleright(T_d^*) \leq \omega^\triangleright(T_d)$, le théorème sera prouvé.

Pour un nœud u de T^* , soit $X(u)$ le nombre de terminaux contenus dans le sous arbre de T^* enraciné en u . On cherche un nœud v de T^* tel que $X(v) \geq 1 + \lceil \frac{k-1}{d} \rceil$ terminaux, et dont tout fils w vérifie $X(w) \leq \lceil \frac{k-1}{d} \rceil$. Si un tel nœud n'existe pas, on pose $v = r$, on a alors nécessairement $X(r) \leq \lceil \frac{k-1}{d} \rceil$. Alors on remplace le sous-arbre enraciné en v par une étoile reliant v à tous ses terminaux. Le nombre de nœuds de branchement dans ce sous-arbre est réduit à 1, et le poids de ce sous arbre n'a pu être multiplié par plus de $\lceil \frac{k-1}{d} \rceil$. On remplace temporairement cette nouvelle étoile par un terminal seul, à la même position que v précédemment. On recommence jusqu'au moment où T^* est réduit à un terminal. On construit alors au plus d étoiles.

T_d s'obtient en retransformant les terminaux en étoiles. Leur poids est au plus $\lceil \frac{k-1}{d} \rceil$ fois celui des morceaux d'arbre de T^* qu'elles remplacent. Donc T_d vérifie la propriété désirée, prouvant le théorème. \square

S'il existe une α -approximation polynomiale pour ASBC, alors le théorème 4.1 montre qu'il est possible de trouver une $\alpha^{\lceil \frac{k-1}{d} \rceil}$ -approximation polynomiale pour le problème de Steiner en diminuant artificiellement le nombre de nœuds diffusants à d et en résolvant le problème ASBC associé. Par exemple, puisque ASBC est XP en d , il existe une $\lceil \frac{k-1}{d} \rceil$ -approximation XP en d pour DST. Un bon rapport d'approximation α pour ASBC implique donc un meilleur rapport d'approximation pour DST. Cependant, le théorème qui suit nous montre un fort résultat d'inapproximabilité pour ASBC.

Théorème 4.2. *Sous contrainte que $NP \not\subseteq DTIME[n^{O(\log \log n)}]$, quel que soit $\epsilon > 0$, il n'est pas possible de trouver un algorithme d'approximation polynomial pour le problème ASBC de rapport $1 + (\frac{1}{e} - \epsilon)^{\frac{k}{d-1}}$.*

Idée de la démonstration. Il s'agit d'une réduction depuis le problème maximum Coverage qui, étant donné un univers X' , une couverture S' de X' et un entier d' non nul demande de couvrir un nombre maximum d'éléments de X' avec au plus d' ensembles de S' . Ce problème, sous contrainte que $NP \not\subseteq DTIME[n^{O(\log \log n)}]$, quel que soit $\epsilon > 0$, ne peut être approché avec un rapport $1 - \frac{1}{e} + \epsilon$, et ce, même si on sait que toute solution optimale couvre X' en entier avec exactement d' ensembles [Fei98].

Pour effectuer la réduction, on associe à une instance $I_C = (X', S', d')$ de maximum Coverage une instance $I_B = (G, r, X, \omega, d = d' + 1)$ de ASBC. On suppose que toute solution optimale de I_C couvre X' en entier

avec exactement d' ensembles. L'instance I_B contient un nœud pour chaque ensemble de S' , et un terminal pour chaque élément de l'univers X' . Chaque nœud-ensemble est relié par un arc de poids 1 aux terminaux-éléments qu'il contient. De plus une racine est reliée à tous les ensembles par un arc de coût $B > 0$ et à tous les terminaux par un arc de coût $B + 1$. Le paramètre B sera déterminé ultérieurement. Soit $k = |X'| = |X|$.

On associe à toute solution réalisable C de I_C contenant $d - 1$ ensembles une solution réalisable $\mathcal{T}(C)$ de I_B de coût $\omega^p(\mathcal{T}(C)) = B \cdot (d - 1) + |X(C)| + (B + 1) \cdot (k - |X(C)|)$ en reliant la racine aux terminaux $X(C)$ couverts par C via les nœuds-ensembles de C , et à tout autre terminal t par l'arc (r, t) . Inversement, on associe à toute solution réalisable T de I_B une solution réalisable $\mathcal{C}(T)$ de I_C en renvoyant tous les nœuds-ensembles de T et en complétant pour que cette couverture contienne $d - 1$ ensembles. Le lemme clef de cette réduction est de prouver que $\omega^p(\mathcal{T}(\mathcal{C}(T))) \leq \omega^p(T)$. La preuve de ce lemme n'est pas détaillée ici.

On suppose maintenant qu'il existe une $\rho = 1 + (\frac{1}{e} - \epsilon) \frac{k}{d-1}$ -approximation pour ASBC.

$$\frac{B \cdot (d - 1) + |X(C)| + (B + 1) \cdot (k - |X(C)|)}{B \cdot (d - 1) + k} = \frac{\omega^p(\mathcal{T}(\mathcal{C}(T)))}{\omega^p(\mathcal{T}(\mathcal{C}(T^*)))} \leq \frac{\omega^p(T)}{\omega^p(\mathcal{C}^*)} \leq \rho$$

$$|X'| \cdot (1 - \frac{1}{e} + \epsilon + \frac{1 - \rho}{B}) \leq |X(\mathcal{C}(T))|$$

Posons $B = 2 \cdot \frac{\rho - 1}{\epsilon} > 0$. Alors $1 - \frac{1}{e} + \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{|X(\mathcal{C}(T))|}{|X(\mathcal{C}^*)|}$, ce qui est en contradiction avec le résultat d'inapproximabilité du problème maximum Coverage. \square

5 Conclusion

Dans ce papier, nous avons construit une généralisation, nommée ASBC, pour le problème de l'arborescence de Steiner dans le cas d'un réseau ne contenant qu'au plus d nœuds diffusants. Nous avons montré que ASBC est XP en d et permet de construire une approximation XP en d pour le problème de Steiner. Cependant, nous avons également montré un fort résultat d'inapproximabilité pour ASBC.

Un problème ouvert est de trouver un algorithme d'approximation pour ASBC. Actuellement, les approximations envisagées pour ce problème ne sont que des adaptations des algorithmes pour le problème de Steiner, dont le rapport resterait inchangé et ne dépend que du nombre de terminaux. Il serait intéressant de trouver une approximation dont le rapport dépende également de d .

Références

- [DF12] RG Downey and MR Fellows. Fundamentals of Parameterized complexity. *Undergraduate Texts in Computer Science*, 2012.
- [Fei98] Uriel Feige. A threshold of $\ln n$ for approximating set cover. *JACM*, pages 634–652, 1998.
- [GHSV02] L Gargano, P Hell, L Stacho, and U Vaccaro. Spanning trees with bounded number of branch vertices. *ICALP*, pages 355–365, 2002.
- [Kar72] RM Karp. *Reducibility among combinatorial problems*. Springer, 1972.
- [LW05] Hwa-chun Lin and Sheng-wei Wang. Splitter Placement in All-Optical WDM Networks. 2005.
- [MZQ98] R Malli, X Zhang, and C Qiao. Benefit of Multicasting in All-Optical Networks. *SPIE Proc. Conf. All-Optical Networking*, 1998.
- [RCT⁺12] Vincent Reinhard, Johanne Cohen, Joanna Tomasik, Dominique Barth, and Marc-Antoine Weisser. Optimal configuration of an optical network providing predefined multicast transmissions. *Comput. Netw.*, 56(8) :2097–2106, 2012.
- [RTBW12] Vincent Reinhard, Joanna Tomasik, Dominique Barth, and Marc-Antoine Weisser. Bandwidth Optimization for Multicast Transmissions in Virtual Circuit Networks. *IFIP Network.*, 2012.
- [Tar77] RE Tarjan. Finding optimum branchings. *Networks*, 7(1) :25–35, January 1977.
- [WWBB13] D Watel, MA Weisser, C Bentz, and D Barth. Steiner Problems with Limited Number of Branching Nodes. *SIROCCO*, pages 310–321, 2013.